ЛЕКЦИЯ 6

Цепи Маркова в непрерывном времени

У процесса Пуассона большое количество черт, роднящих его с цепями Маркова. Это дискретные сменяющиеся состояния, а также что-то вроде свойства отсутствия памяти (марковость), которые мы видели во втором определении. Мы готовы теперь к тому, чтобы изучить этот вопрос более формально и посмотреть, какие ещё идеи для математических моделей можно вытащить из похожих конструкций.

6.1 История и сигма-алгебры

До текущего момента мы уже касались вопросов информации, истории и прошлого. Например, в цепях Маркова мы познакомились с Марковским свойством:

$$P\left(X_t = k \mid X_{t-1} = x_{t-1}, .., X_{t-m} = x_{t-m}\right) = P\left(X_t = k \mid X_{t-1} = x_{t-1}\right),$$

это следовало из того, как мы построили процесс. Такое свойство многие интерпретируют как то, что *вся полезная информация* о X_t содержится в самом последнем ближайшем к нему в истории наблюдении и что более ранняя история не важна. Мы можем в этой связи задать вопрос: что такое в этом контексте информация, история и как её можно было бы описать математически. Это случайные величины, их реализации? Если ограничиться таким взглядом, то встаёт другой вопрос, более технический: как определить марковское свойство в непрерывном времени?

Оказывается, в этом контексте нам очень хорошо подходит сигма-алгебра.

Пример 6.1. *(Снова в школу) Рассмотрим очень простое вероятностное пространство, состоящее из*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

и какой-нибудь меры P (всё дискретно, поэтому такие меры очень простые). Такое пространство все видят на первых лекциях по теории вероятности, когда рассматривают бросок кубика. Рассмотрим случайную величину X – результат броска кубика, её можно построить, например, как $X(\omega) = \omega$, тогда закон распределения (мера P^X) должен совпадать с мерой P.

Результат броска – это число x от 1 до 6. Если мы задумаемся о том, какие события привели к такому результату, то нас должны интересовать прообразы $X^{-1}(\{x\})$. При *нашей конструкции результат броска однозначно идентифицирует элементарный исход, который к нему привёл. В этом смысле случайные величины удобно рассматривать как числовое измерительное устройство (градусник), которое позволяет нам как-то судить о том, какое событие $A \in \mathcal{F}$ могло к нему привести.*

Теперь давайте рассмотрим другое устройство. Например, Антон невидимо для вас бросает кубик и говорит, чётное число выпало или нет. Это случайная величина Y, которая принимает два значения 0(чётно) и 1(нечётно). Величины X, Y получаются зависимыми. Если посмотреть, на прообразы Y, то увидим

$$Y^{-1}(\{0\}) = \{0, 2, 4\}, Y^{-1}(\{1\}) = \{1, 3, 5\}.$$

Теперь показания Антона не могут однозначно идентифицировать элементарный исход, но зато мы умеем отличать чётные исходы от нечётных. Это и есть информация: она тем дороже, чем больше разных событий мы можем отличать. Многие приписывают следующее высказывание классику теории кодирования и известному изобретателю Клоду Шенону: информация – это снятая неопределённость (Information is the resolution of uncertainty). Неопределённости тем больше, чем более размыты прообразы, мы можем идентифицировать элементарный исход только с некоторой точностью.

Так, в терминах вероятности информацию, данную величиной X можно понимать как сигма-алгебру $\mathcal{F}^X = \sigma(X)$, наименьшую сигма-алгебру, которая включает в себя все прообразы X. Информации от знания значения X тем больше, чем больше эта сигма-алгебра. А что насчёт случайных процессов? У нас теперь есть целое (возможно, континуальное) множество величин и соответственно целые множества сигма-алгебр.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство, в этой лекции мы рассматриваем только T, которое является подмножеством $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$.

Определение 6.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство. Совокупность σ-подалгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \in T$, называется фильтрацией, если $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ при любых $s \leq t$. Часто мы будем укорачивать полное обозначение $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ до $(\mathcal{F}_t)$, где из контекста не будет возникать двусмысленности.*

Определение фильтрации означает, что если множество $B \in \mathcal{F}$ измеримо относительно $\mathcal{F}_s$, то оно также измеримо относительно $\mathcal{F}_t$ при $s \leq t$, однако σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ может содержать множества, неизмеримые относительно $\mathcal{F}_s$. Тем самым мы рассматриваем $\mathcal{F}_s$ как всю информацию к моменту s и с ростом времени этой информации меньше не становится. Вообще, конечно, таких фильтраций можно придумать очень много, это отражает тот факт, что в физике есть самые разные способы измерения реальности, а на финансовом рынке у всех есть свои инсайды и свой пул анализируемой информации. В частности, на этом языке можно записать марковское свойство.

Определение 6.2. *Пусть X – случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принимающий значения в измеримом пространстве $(\Xi, \mathcal{G})$. Процесс X обладает марковским свойством относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)$, если для всех $t > s \in T$ и для всех $A \in \mathcal{G}$*

$$P\left(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s\right) = P\left(X_t \in A \mid X_s\right).$$

Условная вероятность при условии сигма-алгебры комфортно определяется как условное матожидание индикатора

$$P\left(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}(X_t(\omega) \in A) \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Если мы рассматриваем разные возможные события A, то какие-то из них мы можем идентифицировать, в этом случае $A \in \mathcal{F}_t$ (то есть A измеримо относительно $\mathcal{F}_t$) означает, что в момент t мы точно можем сказать: случилось A или нет.

В частности, независимость приращений после момента t от сигма-алгебр $\mathcal{F}_s,\ s \le t$ влечёт марковское свойство для процесса X. Для случайных процессов мы часто будем работать с фильтрациями, порождёнными случайным процессом, которые состоят из сигма-алгебр

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ s \le t).$$

Если для любого t величина X_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, То говорят, что процесс X *согласован с фильтрацией* $(\mathcal{F}_t)$. Естественно, что X согласован со своей $(\mathcal{F}_t^X)$.

Пример 6.2. *Проверьте, что Винеровский процесс и Пуассоновский процесс обладают марковским свойством относительно своих фильтраций.*

6.2 Снова к процессу Пуассона

Процесс Пуассона – почти цепь Маркова, но теперь в непрерывном времени. Если в дискретном времени для однородной цепи Маркова мы задавали переходную матрицу, то здесь переходят к похожему генерирующему объекту.

В случае процесса Пуассона, к примеру, мы можем несложно вычислить вероятность перехода к следующему состоянию, но только за время h:

$$P\left(X_{t+h} - X_t = 1\right) = \lambda h e^{-\lambda h}.$$

Можно обратить внимание, что это дифференцируемая по h функция, а ещё, что вероятность перехода за бесконечно малый промежуток времени равна

$$\lim_{h \to 0+} \lambda h e^{-\lambda h} = 0,$$

что ни о чём особо не говорит. Но это издержка того, что мы пытаемся задать как бы непрерывное обновление состояния так же, как в дискретной цепи Маркова и это подход неинформативный. Гораздо удобнее оказывается посмотреть на то, как устроена динамика изменения переходной матрицы в зависимости от шага по времени h.

Марковское свойство в дискретном времени нам говорит, что если есть переходная матрица $P(t)$ за временной промежуток t, то

$$P(t+s) = P(t)P(s) = P(s)P(t),$$

которое также называют *полугрупповым свойством*, а набор переходных матриц с операцией матричного умножения – *марковской полугруппой*. Достаточно несложно проверить, что матрица переходных вероятностей Пуассоновского процесса удовлетворяет этому свойству в силу независимости приращений. Действительно, если мы рассмотрим несколько фиксированных времён $t_1 < t_2 < t_3$, то

$$P\left(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, X_{t_3} = x_3\right) = P\left(X_{t_3} = x_3 \mid X_{t_2} = x_2\right) P\left(X_{t_2} = x_2 \mid X_{t_1} = x_1\right) P\left(X_{t_1} = x_1\right),$$

а просуммировав по x_2 получим как раз матричное произведение, на которое слева умножается вектор стартовых вероятностей $P\left(X_{t_1} = x_1\right)$.

6.3 Генератор марковской полугруппы

В непрерывном времени это позволяет нам обобщить подход к цепям Маркова через использование генератора, как порождающего элемента по аналогии с переходной матрицей в дискретном случае, но поскольку время становится непрерывным, на смену дискретным отношениями приходят дифференциальные уравнения.

Определение 6.3. *Генератором марковской полугруппы* $(P(t))_{t\in T}$ *называется*

$$Q = \lim_{h\to 0+} \frac{P(h) - I}{h}.$$

Генератор задаёт полугруппу таким образом:

$$P'(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t)Q = QP(t),$$

по полугрупповому свойству. Уравнение

$$P'(t) = P(t)Q$$

называют *прямым уравнением Колмогорова*, а

$$P'(t) = QP(t)$$

носит название *обратного уравнения Колмогорова.*

Иными словами, в обоих случаях при конечном или счётном числе состояний мы получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (даже 2), решением каждого из которых (во всяком случае, при конечном числе состояний) при физически логичном предположении $P(0) = I$ является

$$P(t) = e^{tQ},$$

матричная экспонента. Генератор в этом смысле определяет сразу всё семейство переходных матриц. Поэтому когда задают цепь Маркова в непрерывном времени, обычно действуют именно через генератор, который в литературе обычно и называют Q-матрицей, в то время как понятие генератора встречается уже в более общих марковских процессах.

6.4 Цепь Маркова

Естественно, прямо из коробки стохастичность $P(t)$ не гарантирована, поэтому налагают условия на матрицу Q по аналогии с условиями на матрицу P в дискретном времени.

Определение 6.4. *Q-матрицей называется матрица Q, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *диагональные элементы неположительны $q_{ii} \leq 0, \forall i$,*
2. *внедиагональные элементы неотрицательны $q_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$,*
3. *выполнено условие баланса $\sum\limits_j q_{ij} = 0$.*

Стохастичность можно показать формально, поэтому ниже есть доказательство, которое показывает, как это можно сделать, если вы такого раньше не делали.

Теорема 6.1. *Пусть Q является Q-матрицей. Тогда матрица $P(t) = \exp(tQ)$ является стохастической и обладает полугрупповым свойством:*

$$P(t+s) = P(s)P(t) \quad \forall s, t \geq 0. \tag{6.1}$$

▷ Напомним определение матричной экспоненты:

$$\exp(tQ) = I + \sum_{k\geq 1} \frac{(tQ)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(tQ)^k}{k!}.$$

Полугрупповое свойство следует из определения матричной экспоненты, если использовать биноминальное разложение:

$$((t+s)Q)^k = (t+s)^k Q^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l t^l s^{k-l} Q^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l (tQ)^l (sQ)^{k-l}.$$

Тогда

$$\exp((t+s)Q) = \sum_{k\geq 0} \frac{((t+s)Q)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (tQ)^l (sQ)^{k-l} = \sum_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{k} \frac{(tQ)^l}{l!} \frac{(sQ)^{k-l}}{(k-l)!}$$

и

$$\exp(tQ)\cdot\exp(sQ) = \sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!}(tQ)^l \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!}(sQ)^m = \sum_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{k} \frac{(tQ)^l}{l!} \frac{(sQ)^{k-l}}{(k-l)!}.$$

Теперь займемся доказательством стохастичности матрицы $P(t) = \exp(tQ)$.

Для начала заметим, что по определению $\sum_j q_{ij} = 0$, т.е. сумма элементов в строке матрицы Q равна нулю. То же самое верно и для матрицы Q^n:

$$\sum_j q_{ij}^{(n)} = \sum_{j,l} q_{il}^{(n-1)} q_{lj} = \sum_l q_{il}^{(n-1)} \sum_j q_{lj} = \sum_l q_{il}^{(n-1)} = 0.$$

Т.к. по определению

$$P(t) = \exp(tQ) = I + \sum_{k\geq 1} \frac{(tQ)^k}{k!},$$

сумма элементов в строке матрицы $P(t)$ равна 1.

Теперь докажем, что элементы матрицы $P(t)$ неотрицательны для малых $t > 0$:

$$P(t) = I + tQ + o(t),$$
$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} + tq_{ij} + o(t).$$

Это означает, что $p_{ii}(t) > 0$ и $p_{ij}(t) > 0$ для $i \neq j$, при условии $q_{ij} > 0$.

В случае, если $q_{ij} = 0$, мы можем рассмотреть разложение Тейлора для более высоких порядков. Рассуждая по индукции, приходим к выводу: если найдется такое $n > 0$, что $q_{ij}^n > 0$, тогда $p_{ij}(t) > 0$. В противном случае $p_{ij} = 0$.

Чтобы перейти от малых $t > 0$ к произвольным $t > 0$, используем полугрупповое свойство:

$$P(t) = P\left(\frac{t}{n}\right) P\left(\frac{t}{n}\right) ... P\left(\frac{t}{n}\right) = \left[P\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Таким образом мы доказали, что $P(t)$ является стохастической матрицей. $\square$

Определение 6.5. *Цепь Маркова в непрерывном времени с Q-матрицей Q и начальным распределением μ - это случайный процесс $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ со значениями в $\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1. $P(X_0 = i) = \mu_i$,

2. $P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, ..., X_{t_n} = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(0) ... p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$, $0 < t_1 < ... < t_n$,

где $p_{ij}(t)$ - это элементы матрицы $P(t) = \exp(tQ)$.

6.5 Вид траекторий и симуляция

Утверждение 6.2. *Траектория Марковской цепи с непрерывным временем с Q-матрицей Q проводит в состоянии i случайное время, распределенное экспоненциально с параметром $q_i = -q_{ii}$, а затем переходит в состояние $j \neq i$ с вероятностью $\frac{q_{ij}}{q_i}$.*

▷ Пока без аппарата времён остановки мы не готовы доказать формально, что время ожидания будет экспоненциально распределено, но мы можем вычислить вероятности прыжка, если он происходит. Для этого с помощью символа Кронекера δ_{ij} рассмотрим немного необычную

$$P\left(X_{t+h} = j \mid X_t = i, X_{t+h} \neq i\right) = \frac{(1-\delta_{ij}) P\left(X_{t+h} = j \mid X_t = i\right)}{P\left(X_{t+h} \neq i \mid X_t = i\right)},$$

при $i = j$ вероятность по понятным причинам равна нулю. Все вероятности даются переходной матрицей $P(h)$, конкретно, её i-й строкой:

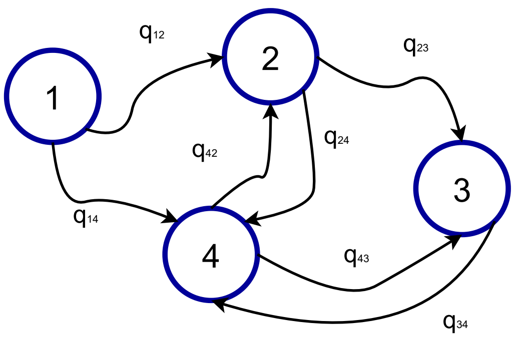
$$= \frac{(1-\delta_{ij})(q_{ij}h + o(h))}{h\sum_{j\neq i} q_{ij} + o(h)}$$

при $h \to 0+$. В пределе получится

$$P\left(X_{t+h} = j \mid X_t = i, X_{t+h} \neq i\right) \to P\left(X_t = j \mid X_t = i,\ \Delta X_t \neq 0\right) = \frac{(1-\delta_{ij}) q_{ij}}{-q_{ii}},$$

где сумма свернулась в $-q_{ii}$ по условию баланса. □

Вернёмся немного в жизнь и посмотрим, как именно Q-матрица задаёт динамику процесса. Внедиагональные члены q_{ij} определяют *интенсивности перехода* $i \to j$, как сильно цепь склонна совершить переход, если он происходит.



Пример 6.3. *С другой стороны, цепь некоторое время остаётся в исходном состоянии и она тем меньше проводит там времени, чем больше суммарная интенсивность выхода, это мы получаем из $q_i = -q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij}$. Можно показать, что время нахождения в состоянии i именно экспоненциальное с таким параметром; этот удивительный факт следует всего лишь из марковского свойства.*

Процесс Пуассона можно описать как Марковскую цепь в непрервном времени с Q-матрицей вида

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Матрицу $P(t) = \exp(tQ)$ можно записать в следующем виде:

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & \frac{\lambda t}{1!}e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)}{2!}e^{-\lambda t} & \ldots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \frac{\lambda t}{1!}e^{-\lambda t} & \ldots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

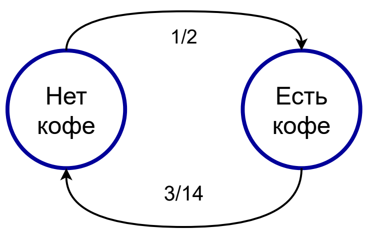
Можно заметить, что строки матрицы $P(t)$ описывают распределение Пуассона с параметром (λt).

Пример 6.4. *(Кофе на офисной кухне) В офис доставка кофе в среднем занимает 2 дня, но доставка работает не очень стабильно и может опаздывать. Сотрудники обычно заказывают из своего бюджета новую пачку (1кг) кофе, когда кофе заканчивается. Говорят, что в среднем по статистике в офисах такого размера уходит 3 пачки за 2 недели, но расход может быть больше или меньше в зависимости от случайных факторов.*

Модельно, посмотрев на данные, можно подумать про цепь Маркова в непрерывном времени. В данном случае у нас всего два состояния: 0 (нет кофе) и 1 (есть кофе). Кофе выпивают с интенсивностью $3/14$ пачки в день (размерность важна!) и привозят с интенсивностью $1/2$ пачки в день, так как среднее время – это $1/\lambda$ у экспоненциального распределения. Q-матрица в данном случае выглядит как-то так:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/14 & -3/14 \end{bmatrix}.$$

И это представляется таким графом:



Допустим, процессы устроены так же, но сотрудники складируют по две пачки кофе на кухне и покупают сразу две пачки, когда кофе заканчивается. В этом случае картина изменится и Q-матрица будет выглядеть по-другому: теперь состояния три: нет кофе, *есть 1 пачка и есть 2 пачки. Как будет устроен граф такого процесса? Это частный случай более общего семейства процессов, популярных в теории массового обслуживания: процесса рождения и гибели.*

Опишем конструктивный способ задания марковской цепи с непрерывным временем, аналогичный способу, которым мы строили процесс Пуассона. Такая конструкция объясняет нам как именно можно детально симулировать траектории цепи Маркова в непрерывном времени. Зададим следующие случайные величины:

1. ξ_i^n - интервал времени, проведенный в состоянии i, между $(n-1)$-ым переходом и n-ым переходом , распределен экспоненциально с параметром $-q_{ii}$,
2. H^n - время n-го перехода,
3. η_i^n - состояние после n-го перехода из состояния i, имеет распределение $P(\eta_i^n = j) = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}$,
4. $S^n = \eta_{S^{n-1}}^n$ - n-е состояние.

Тогда процесс можно построить следующим образом:

1. $X_0 = S^0 \sim \mu$ - в начальный момент времени нулевое состояние процесса распределено по μ,
2. $H^0 = 0$, $H^n = H^{n-1} + \xi_{S^{n-1}}^n$ - генерируем момент времени n-го перехода,
3. $S^n = \eta_{S^{n-1}}^n$ - генерируем n-ое состояние,
4. $X_t = S^n$ при $t \in [H^n, H^{n+1})$ - процесс находится в состоянии S^n до следующего перехода.

Теорема 6.3. *Для Марковской цепи в непрерывном времени верны свойства, аналогичные свойствам Марковской цепи в дискретном времени:*

1. $P(X_t = j | X_0 = i) = P(X_{t+s} = j | X_s = i) = p_{ij}(t)$,
2. $P(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ... X_0 = i_0) = P(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = p_{ij}(t_n - t_{n-1})$,
3. $P(X_t = j) = (\mu P(t))_j$.

$\triangleright$ Доказательства этих свойств аналогичны дискретному случаю. Попробуйте! $\square$

Одна из центральных ссылок для изучения цепей Маркова в дискретном и непрерывном времени – это [6, Том 2].

Литература

[1] Mathias Beiglböck, Walter Schachermayer, and Bezirgen Veliyev. A short proof of the Doob–Meyer theorem. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(4):1204–1209, 2012.

[2] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[3] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2011.

[4] J. Ville. *Étude Critique de la Notion de Collectif*. Collection des monographies des probabilités. Gauthier-Villars, 1939.

[5] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[6] М.Я Кельберт and Ю.М. Сухов. *Вероятность и статистика в примерах и задачах*. Изд-во МЦНМО, М., 2010.

[7] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы*. МЦНМО, 2013.