Мартингалы

Как много мы можем сказать о процессе в будущем, если мы уже пронаблюдали какую-то часть его траектории? Формальным ответом на то, что такое информация, является введение фильтрации и более детальное исследование процессов в её контексте.

7.1 Фильтрация и моменты остановки

Фильтрация, как мы уже успели видеть, является очень удобным инструментом для представления некоторой *истории* или *информации*. Введение фильтрации с опорой на условное матожидание позволяет ввести более общее марковское свойство и взглянуть на уже известные нам примеры Винеровского и Пуассоновского процесса с нового ракурса: как на марковские процессы. Как мы увидим позже, этот взгляд позволяет нам исследовать не только сами случайные процессы и траектории как случайные величины и реализации, но ещё и отслеживать эволюцию вероятностного распределения с помощью генератора и марковских полугрупп.

Случайный процесс, как мы видели, может быть достаточно хитро устроен. Не на все вопросы мы можем сразу ответить опираясь только на классическую вероятность и нужно строить какие-то новые инструменты, подобно искусным мастерам и инженерам. Одним из таких инструментов, который несколько параллельно развивается с нашим курсом, является момент остановки. Для простоты далее мы работаем с физическим одномерным временем (непрерывным или дискретным), то есть, $T \subset \mathbb{R}$.

Определение 7.1. *Случайная величина $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в T (но возможна бесконечность!) называется моментом остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если $\{\omega \in \Omega \ : \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$.*

Как и в классических книгах, часто мы будем укорачивать запись

$$\{\omega \in \Omega \ : \ \tau(\omega) \leq t\}$$

до

$$\{\tau \leq t\} ,$$

поэтому в спорных местах об этом полезно помнить.

Давайте рассмотрим простейший пример момента остановки. Представим себе игру, каждый раунд которой может закончится либо выигрышем (получаем 1 доллар), либо проигрышем (теряем 1 доллар). Эту игру закодируем бесконечной последовательностью, элементы которой либо 1 (выигрыш), либо -1 (проигрыш), последовательность результатов – наше множество элементарных исходов. Пусть τ_1 - первый момент времени, когда накопленный выигрыш составит 1 доллар, а τ_2 - минимальный номер раунда, такой, что следующий раунд будет проигран. Давайте выясним, являются случайные величины τ_1 и τ_2 моментами остановки.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ...), \omega_i \in \{-1, +1\}\},$$

Фильтрационные сигма-алгебры $\mathcal{F}_n$ определим как наименьшие включающие в себя все цилиндрические множества

$$A_n^{a_1,..,a_n} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = a_1, ..., \omega_n = a_n\}.$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}).$$

А времена – это случайные величины

$$\tau_1(\omega) = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 3\},$$

$$\tau_2(\omega) = \min\{n : \omega_{n+1} = -1\},$$

Теперь стало очевидно, что множество $\{\tau_1 \le n\} \in \mathcal{F}_n$, поэтому τ является моментом остановки, а $\{\tau_2 \le n\} \notin \mathcal{F}_n$, т.е. τ_2 не является моментом остановки.

Можно доказать много разных свойств про моменты остановки.

Утверждение 7.1. *Если τ_1, τ_2 - моменты остановки фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, то $\tau_1 \wedge \tau_2 := \min(\tau_1, \tau_2)$ также является моментом остановки.*

$\triangleright$

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \cup \{\tau_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

Аналогичные свойства можно доказать для $\tau_1 \vee \tau_2 := \max(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 + \tau_2$. Оставим это вам.

7.2 Остановленная сигма-алгебра

Определение 7.2. *Пусть τ - момент остановки фильтрации $(\mathcal{F})_{t\in T}$. Совокупность событий $A \in \mathcal{F}$, для которых $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$, называется σ-алгеброй событий, определенных до момента τ, и обозначается $\mathcal{F}_\tau$.*

Удивительно, но

Утверждение 7.2. *1. $\mathcal{F}_\tau$ является σ-алгеброй,* *2. τ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$,*

3. если $\tau_1 \le \tau_2$ - моменты остановки, то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$

$\triangleright$ 1. Очевидно, певрое свойство выполнено, т.к.

$$\Omega \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Если $A \in \mathcal{F}_\tau$, то

$$(\Omega \setminus A) \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \setminus (A \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

Если $A_i \in \mathcal{F}_\tau$, то

$$(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \cap \{\tau \le t\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

2. Второе свойство выполнено, т.к.

$$\{\tau \le c\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_{\min(c,t)} \in \mathcal{F}_t.$$

3. Третье свойство выполнено, т.к. если $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, то

$$A \cap \{\tau_2 \le t\} = (A \cap \{\tau_1 \le t\}) \cap \{\tau_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

$\square$

Определение 7.3. *Случайный процесс $(X_t)_{t \in T}$ называется согласованным с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если случайная величина X_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$ при любом $t \in T$. Другое название – $(\mathcal{F}_t)$-adapted.*

Простым примером фильтрации служит фильтрация $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$, порожденная самим процессом, где $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \le t)$. Вполне логично, что процесс X согласован со своей фильтрацией $(\mathcal{F}_t^X)$.

Утверждение 7.3. *Пусть X – процесс со значениями в $(\Xi, \mathcal{G})$, согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)$, τ - момент остановки относительно этой фильтрации. Тогда случайная величина X_τ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$.*

$\triangleright$

По сути, нам надо проверить, что

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{для любого} \quad B \in \mathcal{G}.$$

Случайная величина τ принимает значение $s \in T$. Для любого $s \le t$ верно следующее свойство: $\{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ для любого $B \in \mathcal{G}$, т.к. X - согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)$ процесс. Поэтому верно следующее:

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{для любого} \quad B \in \mathcal{G}.$$

$\square$

Времена остановки, таким образом, являются естественным инструментом для исследования моментов достижения значений случайными величинами и не только.

Пример 7.1. *Момент τ первого скачка Пуассоновского процесса X – это момент остановки относительно фильтрации, порождённой X.*

Пример 7.2. *Момент τ первого достижения уровня 15 процессом $X = GBM(x_0, \mu, \sigma^2)$ – это момент остановки.*

Упражнение 7.1. *Как будет выглядеть фильтрация, порождённая цепью Маркова с конечным числом состояний в дискретном времени? Можете ли вы предложить пример момента остановки относительно порождённой ею фильтрации?*

Более подробно мы ещё вернёмся к временам остановки далее.

7.3 Мартингалы

Для вопросов использования истории в случайных процессах есть два важных и разных класса процессов: цепи Маркова и мартингалы, впервые описанные Леви и названные так Виллем в его диссертации 1939 года [4], хотя сам термин относится к популярной азартной стратегии во Франции XVIII века (сам Вилль исследовал как раз задачи о разорении). Современное определение мартингалов звучит так.

Определение 7.4. *Процесс $(X_t)_{t\in T}$ называется мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, если выполнены следующие свойства:*

1. $(X_t)_{t\in T}$ *согласован с фильтрацией* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$,
2. $X_t \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
3. $\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = X_s$ *для любых* $s \le t$.

Если в третьем свойстве знак равенства заменить на $\geq$ или $\leq$, то X будет называться субмартингалом или супермартингалом соответственно.

Второе требование нужно, чтобы матожидания существовали. Оказывается, такие процессы – не редкость.

Утверждение 7.4. *Если $(X_t)_{t\in T}$ - процесс с независимыми приращениями, $\mathbb{E}\left[X_t\right] = c$ для любых $t \in T$, тогда X – это $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in T}$ - мартингал.*

$\triangleright$ Пусть $s \le t$. Тогда верно следующее:

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s^X\right] = \mathbb{E}\left[X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s^X\right] = \mathbb{E}\left[X_t - X_s|\mathcal{F}_s^X\right] + X_s = X_s \quad \text{п.н.}$$

$\square$

Примерами процессов, для которых выполнено предыдущее утверждение (а, следовательно, мартингалов) служит винеровский процесс и процесс $Y_t = X_t - \lambda t$, где X_t - процесс Пуассона. Субмартингалы можно ещё получить трансформацией мартингалов.

Утверждение 7.5. *Пусть (X_t) – это $(\mathcal{F}_t)$ - мартингал, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - выпуклая функция, $Y_t := h(X_t)$ интегрируема для любого $t \in T$. Тогда Y - субмартингал относительно $(\mathcal{F}_t)$.*

$\triangleright$ Оставим вам, тут помогает неравенство Йенсена. $\square$

Мы докажем важные свойства мартингалов с дискретным временем. Все эти теоремы можно обобщить на мартингалы и субмартингалы с непрерывным временем, однако путь туда сейчас вне нашей досягаемости и там нужны аргументы следующего уровня; но для ценителей функционального анализа будет интересно посмотреть сюда [1].

Теорема 7.6. *(Разложение Дуба)*

Если X – это $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ - субмартингал, то существует два случайных процесса M_n и A_n со следующими свойствами:

1. *$X_n = M_n + A_n$ при $t \geq 0$,*
2. *$(M_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал,*
3. *$A_1 = 0$, случайная величина A_n измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ при $n \geq 2$,*
4. *$A_n(\omega) \leq A_{n+1}(\omega)$ п.н. при всех $n \geq 1$, т.е. A_n не убывает*

Более того, если другая пара $\bar{M}_n, \bar{A}_n$ обладает теми же свойствами, то $M_n = \bar{M}_n, A_n = \bar{A}_n$ п.н.

$\triangleright$ 1. Определим процессы M_n, A_n по индукции.

$$M_0 = X_0, \quad A_0 = 0,$$

$$A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}, \quad M_n = X_n - A_n, \quad n \leq 1$$

Очевидно, эти процессы обладают свойствами 1,3,4. Проверим свойство 2:

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}.$$

2. Теперь докажем единственность. Для этого покажем, что случайные величины M_n, A_n однозначно определяются по X_{n-1}, X_n

$$A_0 = 0, \quad M_0 = X_0 - A_0 = X_0,$$

$$X_n - X_{n-1} = M_n - M_{n-1} + A_n - A_{n-1},$$

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} + A_n - A_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}],$$

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = A_n - A_{n-1},$$

$$M_n = X_n - A_n.$$

□

Несмотря на свою простоту, в непрерывном времени возникают более сложные технические вопросы, связанные с фильтрацией, но на нашем уровне можем по аналогии принимать этот факт и в непрерывном времени. Сама идея достаточно простая: чтобы из субмартингала получить мартингал, надо вычесть условное матожидание, которое выступает как некоторый тренд и которое как раз не убывает. Уже скоро мы увидим, как этого можно добиваться на практике.

7.4 Теорема о свободном выборе

Важной особенностью мартингалов является инвариантность среднего относительно выбранного сечения, даже если выбор происходит с помощью момента остановки. Наличие этой теоремы – большая и серьёзная причина искать мартингалы в своих исследуемых процессах. Многие практические вопросы, связанные с исследованием времён остановок, но и некоторые фундаментальные теоретические вопросы, рассматриваются с этой теоремой в руках, которая позволяет достичь очень многого.

Теорема 7.7. *(Теорема о свободном выборе) (optional stopping) (optional sampling) Пусть X – субмартингал относительно $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ и σ, τ - моменты остановки, $\sigma \leq \tau \leq k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$.*

Если X - мартингал или супермартингал, то выполнено такое же утверждение, но с заменой $\leq$ на $=$ или $\geq$.

▷ Докажем для случая, когда X - это субмартингал.

Пусть $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Введем следующие события для $1 \leq m \leq n$:

$$A_m = A \cap \{\sigma = m\} \quad A_{m,n} = A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau = n\}$$

$$B_{m,n} = A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau > n\} \quad C_{m,n} = A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau \geq n\}$$

Очевидно, $C_{m,n} = A_{m,n} \cup B_{m,n}$, $B_{m,n} = C_{m,n+1}$, $A_m = C_{m,m}$, $C_{m,k+1} = \emptyset$, $\bigcup\limits_{m=1}^{k} A_m = A$.

Заметим, что $\{\tau > n\} = \Omega \setminus \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, поэтому $B_{m,n} \in \mathcal{F}_n$.

По определению субматрингала $X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, поэтому верно следующее:

$$\int\limits_{B_{m,n}} X_n dP \leq \int\limits_{B_{m,n}} X_{n+1} dP,$$

Используя свойства $C_{m,n} = A_{m,n} \cup B_{m,n}$, $B_{m,n} = C_{m,n+1}$, получим:

$$\int\limits_{C_{m,n}} X_n dP \leq \int\limits_{A_{m,n}} X_n dP + \int\limits_{B_{m,n}} X_n dP \leq \int\limits_{A_{m,n}} X_n dP + \int\limits_{B_{m,n}} X_{n+1} dP = \int\limits_{A_{m,n}} X_n dP + \int\limits_{C_{m,n+1}} X_{n+1} dP$$

$$\int\limits_{C_{m,n}} X_n dP - \int\limits_{C_{m,n+1}} X_{n+1} dP \leq \int\limits_{A_{m,n}} X_n dP$$

Возьмем сумму по n от m до k от левой части неравенства:

$$\sum_{n=m}^{k}[\int\limits_{C_{m,n}} X_n dP - \int\limits_{C_{m,n+1}} X_{n+1} dP] = \int\limits_{C_{m,m}} X_m dP - \int\limits_{C_{m,k+1}} X_{k+1} dP = \int\limits_{C_{m,m}} X_m dP = \int\limits_{A_m} X_m dP$$

Возьмем сумму по n от m до k от правой части неравенства:

$$\sum_{n=m}^{k} \int\limits_{A_{m,n}} X_n dP = \sum_{n=m}^{k} \int\limits_{A_m \cap \{\tau = n\}} X_n dP = \int\limits_{A_m} X_\tau dP$$

Получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{A_m} X_m dP \le \int\limits_{A_m} X_\tau dP$$

Теперь сделаем суммирование по m от 1 до k:

$$\sum_{m=1}^{k} \int\limits_{A_m} X_m dP = \sum_{m=1}^{k} \int\limits_{A \cap \{\sigma = m\}} X_m dP = \int\limits_{A} X_\sigma dP$$

$$\sum_{m=1}^{k} \int\limits_{A_m} X_\tau dP = \int\limits_{A} X_\tau dP$$

Получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{A} X_\sigma dP \le \int\limits_{A} X_\tau dP$$

Т.к. множество A было выбрано произвольно, можно сделать вывод, что $X_\sigma \le \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma]$; если вы хорошо знакомы с условным матожиданием, то можете попробовать доказать от противного, если нет – посмотрите определение и попробуйте сообразить, как заставить работать такой аргумент.

Для доказательства аналогичного свойства для супермартингала X достаточно заметить, что $-X$ является $(\mathcal{F}_n)$-субмартингалом. Для доказательства аналогичного свойства для мартингала X_n достаточно заметить, что X_n относительно $(\mathcal{F}_n)$ является одновременно субмартингалом и супермартингалом.

□

Теорема о свободном выборе верна для неограниченных σ, τ при условии, что случайные величины X_n равномерно интегрируемы, что тоже частое предположение – оно позволяет контролировать верхний бесконечный хвост суммы, можете попробовать обобщить.

Определение 7.5. *Множество случайных величин $\{f_s\}_{s \in S}$ называется равномерно интегрируемым, если*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{s \in S} \int\limits_{|f_s| > \lambda} |f_s| dP = 0$$

Теорема о свободном выборе пригождается в очень неожиданных местах, в частности, с её помощью можно строить верхнюю оценку для цен опционов. Помимо этого есть очень полезное неравенство Дуба, которое находит свои приложения в исследовании сходимости численных методов. Далее в доказательстве для краткости мы используем следующее обозначение: $A(\lambda, n) = \{\omega : \max\limits_{1\le i\le n} X_i(\omega) \ge \lambda\}$.

Ещё полезный практически вариант теоремы о свободном выборе можно получить в следующем виде:

Упражнение 7.2. *Докажите, что если X_t – мартингал (или суб/супер), почти наверное ограниченный константой, то есть имеется $C > 0$ такая, что $|X_t| \le C$, то теорема о свободном выборе остаётся верной и для неограниченного времени остановки, но почти наверное конечного.*

Для ценителей, неравенство Дуба, которое тоже нельзя обойти в этом классическом обзоре.

Теорема 7.8. *(Неравенство Дуба) Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - субмартингал. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda > 0$ выполняется неравенство:*

$$\lambda P(A(\lambda, n)) \le \int\limits_{A(\lambda,n)} X_n dP \le \mathbb{E}\left[\max(X_n, 0)\right]$$

▷ Введем следующие моменты остановки:

1. σ_0 - первый момент, когда $X_i \ge \lambda$

2. $\sigma = \sigma_0 \wedge n$

3. $\tau = n$

Поскольку $\sigma \le \tau$, можно применить теорему о свободном выборе:

$$X_\sigma \le \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_\sigma]$$

Множество $A(\lambda, n) \in \mathcal{F}_\sigma$, т.к.

$$A(\lambda, n) \cap \{\sigma \le m\} = \{\omega : \max_{1\le i\le m} X_i(\omega) \ge \lambda\} \in \mathcal{F}_m.$$

Поэтому можно проинтегрировать обе части и подменить справа условное матожидание:

$$\int\limits_{A(\lambda,n)} X_\sigma dP \le \int\limits_{A(\lambda,n)} X_n dP$$

Справа можно использовать грубое неравенство:

$$\int\limits_{A(\lambda,n)} X_n dP \le \int\limits_{A(\lambda,n)} max(X_n, 0) dP \le \mathbb{E}\left[max(X_n, 0)\right]$$

Если $\omega \in A(\lambda, n)$, то $X_{\sigma(\omega)}(\omega) \geq \lambda$. Следовательно,

$$\int\limits_{A(\lambda,n)} X_\sigma dP \geq \int\limits_{A(\lambda,n)} \lambda dP = \lambda P(A(\lambda, n))$$

А теперь соберем все вместе:

$$\lambda P(A(\lambda, n)) \leq \int\limits_{A(\lambda,n)} X_\sigma dP \leq \int\limits_{A(\lambda,n)} X_n dP \leq \mathbb{E}\left[max(X_n, 0)\right]$$

□

Пара упражнений напоследок.

Упражнение 7.3. *Пусть τ – момент остановки, определённый как первый момент достижения уровня 5 Винеровским процессом W (в качестве фильтрации возьмём фильтрацию W). Какое распределение будет у случайной величины W_τ?*

Упражнение 7.4. *Проверьте, существуют ли параметры процесса $X = GBM(x_0, \mu, \sigma^2)$, при которых X будет мартингалом, субмартингалом и супермартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)$.*

Упражнение 7.5. *Проверьте марковское свойство (относительно своей фильтрации) для*

1. *Винеровского процесса W;*
2. *Процесса $GBM(x_0, \mu, \sigma^2)$.*

Упражнение 7.6. *Пусть X – случайный процесс, $(\mathcal{F}_t^X)$ – его фильтрация, τ – момент остановки относительно фильтрации. Покажите, что остановленный процесс $Y_t = X_{t \wedge \tau}$ – тоже матрингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)$.*

Упражнение 7.7. *Для предыдущего задания, пусть $X = W$ – то есть, это Винеровский процесс (с непрерывными траекториями) . Положим, что τ – время первого выхода W за отрезок $[a, b]$, при этом $W_0 \in [a, b]$ почти наверное.*

1. *Докажите, что τ почти наверное конечно и интегрируемо.*
2. *Найдите вероятность того, что граница a будет достигнута первой и что граница b будет достигнута первой.*
3. *Найдите матожидание τ.*

Литература

[1] Mathias Beiglböck, Walter Schachermayer, and Bezirgen Veliyev. A short proof of the Doob–Meyer theorem. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(4):1204–1209, 2012.

[2] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[3] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2011.

[4] J. Ville. *Étude Critique de la Notion de Collectif*. Collection des monographies des probabilités. Gauthier-Villars, 1939.

[5] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[6] М.Я Кельберт and Ю.М. Сухов. *Вероятность и статистика в примерах и задачах*. Изд-во МЦНМО, М., 2010.

[7] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы*. МЦНМО, 2013.